Aula 22

Circuitos de primeira ordem 3
RL

Circuitos Elétricos I

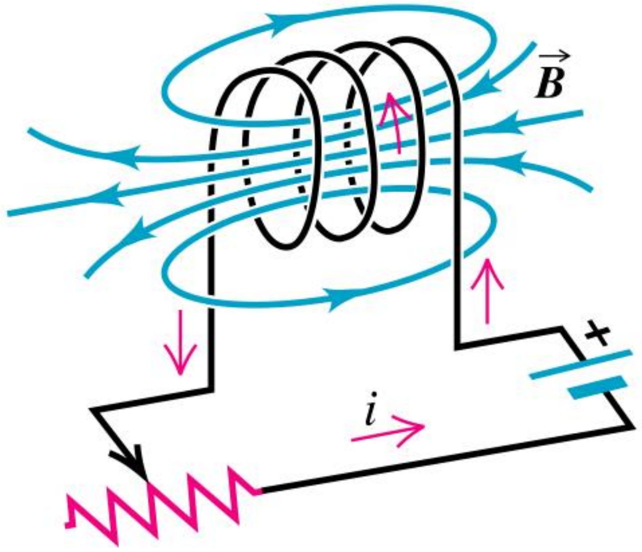
Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

Definições

Os circuitos RL, assim como os circuitos RC, compõe os circuitos de primeira ordem (**equação diferencial de primeira ordem**)

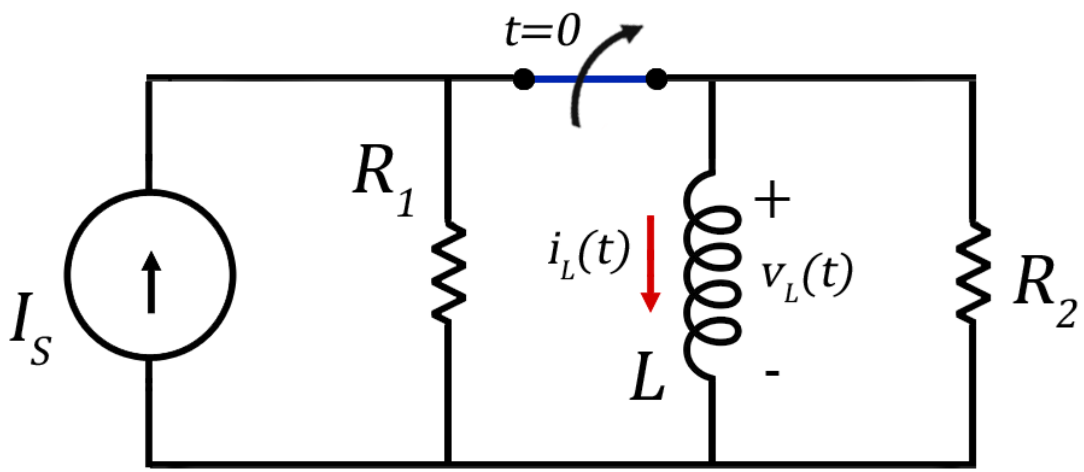
$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt + i(t_0)$$

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$



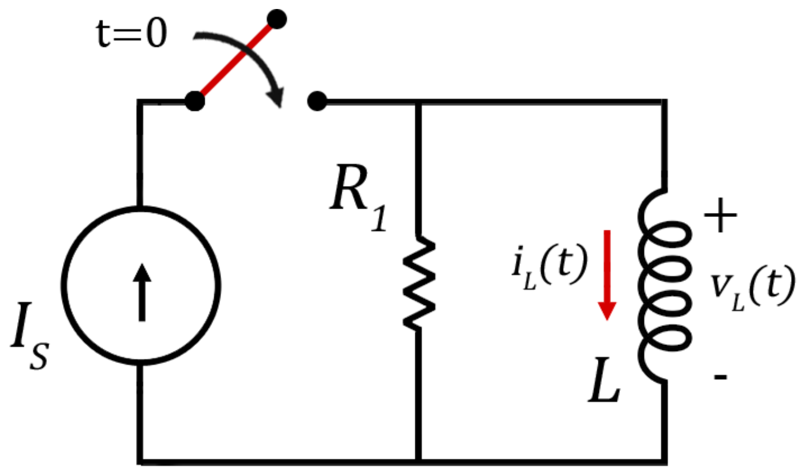
Tipos de resposta RL

Resposta Natural (sem fonte)



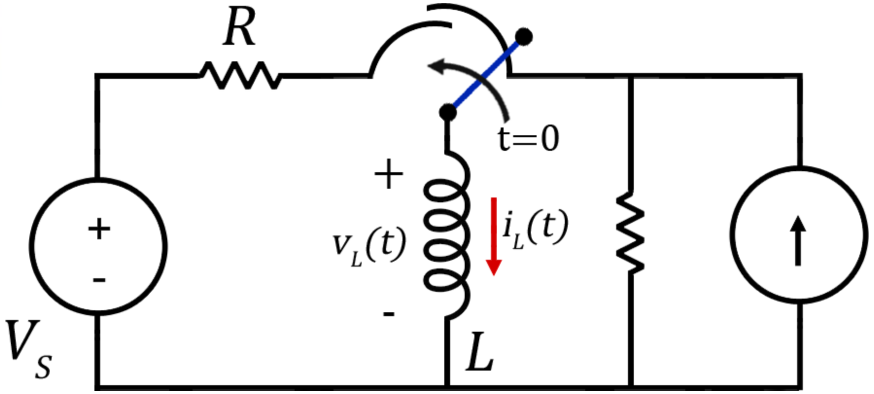
Resposta natural ou carga ou resposta sem fonte, se refere ao comportamento de corrente ou tensão do circuito, sem a presença de uma fonte

Resposta Forçada (a um degrau)



Resposta forçada ou carga ou resposta ao degrau, se refere ao comportamento de corrente ou tensão do circuito, com a presença de uma fonte

Resposta forçada RL



A corrente do indutor não muda de forma abrupta

$\mathbf{0^-} \rightarrow$ *representa o instante anterior ao chaveamento*
$\mathbf{0^+} \rightarrow$ *representa o instante postareior ao chaveamento*

$$\boldsymbol{i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0}$$

Análise da malha do indutor

$$v_s = Ri_L + v_L$$

$$v_s = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_s - Ri_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{v_s - Ri_L}{L} = \frac{di_L}{dt}$$

Diferenciando em relação ao tempo

$$\frac{v_s - Ri_L}{L}dt = di_L$$

$$\frac{1}{L}dt = \frac{1}{v_s - Ri_L}di_L$$

$$-\frac{R}{L}dt = \frac{R}{Ri_L - v_s}di_L$$

Integrando ambos os lados

$$-\frac{R}{L}dt = \frac{R}{Ri_L - v_s}di_L$$

$$\int_{I_0}^{i_L(t)} \frac{R}{Ri_L - v_s}di_L = \int_0^t -\frac{R}{L}dt$$

$$\frac{R}{R}ln(Ri_L - v_s)\Bigg|_{I_0}^{i_L(t)} = -t\cdot\frac{R}{L}\Bigg|_0^t$$

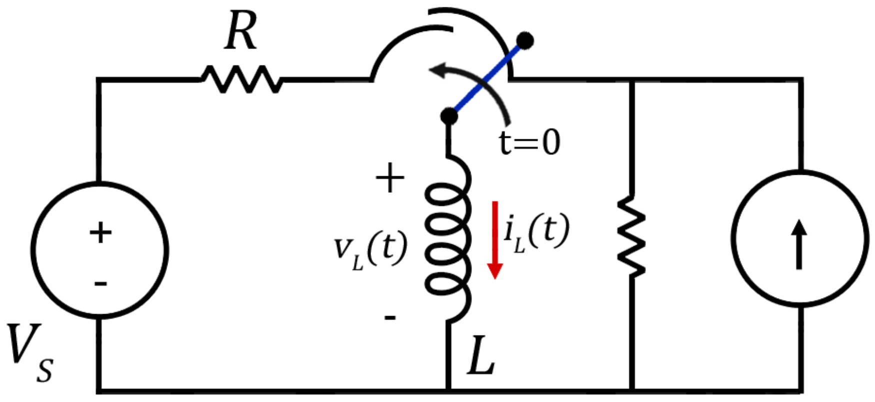
$$ln(Ri_L(t) - v_s) - ln(RI_0 - v_s) = -t\cdot\frac{R}{L}$$

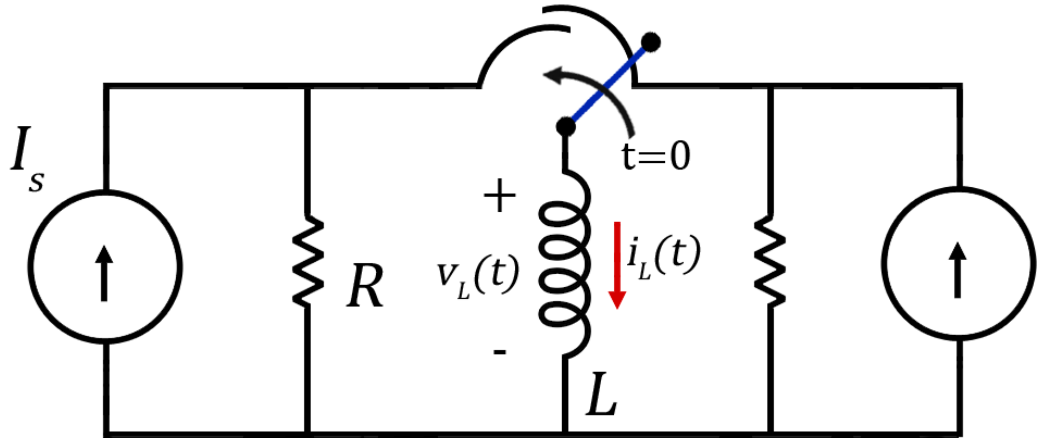
$$ln\left(\frac{Ri_L(t) - v_s}{RI_0 - v_s}\right) = -t\cdot\frac{R}{L}$$

$$\frac{Ri_L(t) - v_s}{RI_0 - v_s} = e^{-t\cdot\frac{R}{L}}$$

$$Ri_L(t) - v_s = (RI_0 - v_s)e^{-t\cdot\frac{R}{L}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i_L(t) = \frac{v_s}{R} + \left(I_0 - \frac{v_s}{R}\right)e^{-t\cdot\frac{R}{L}}}}$$





$$\boxed{i_L(t) = \frac{v_S}{R} + \left(I_0 - \frac{v_s}{R}\right) e^{-t\cdot\frac{R}{L}}}$$

OU

$$\boxed{i_L(t) = I_S + (I_0 - I_s)e^{-t\cdot\frac{R}{L}}}$$

Equação geral, valida para RC ou RL

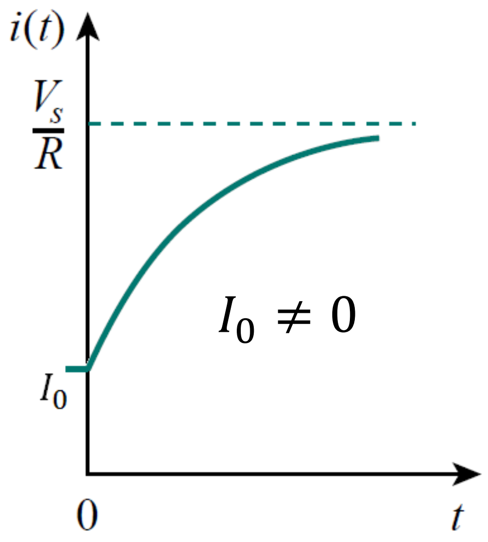
$$\boxed{x(t) = x(\infty) + (x(0) - x(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\tau = RC \quad e \quad x = v_C$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad e \quad x = i_L$$

Resposta RL forçada (a degrau)

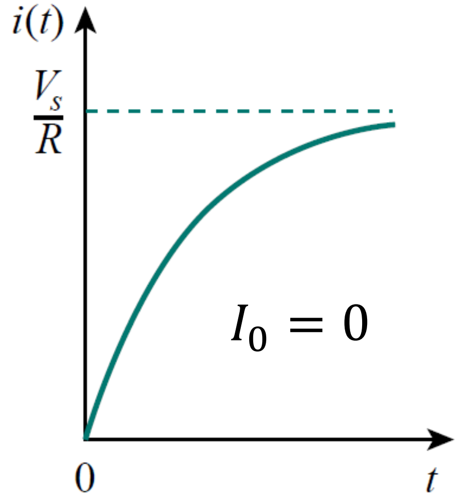
$$i_L(t) = \frac{v_S}{R} + \left(I_0 - \frac{v_s}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Caso o indutor não possua uma corrente inicial:

$$I_0 = 0$$

$$i_L(t) = \frac{v_s}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



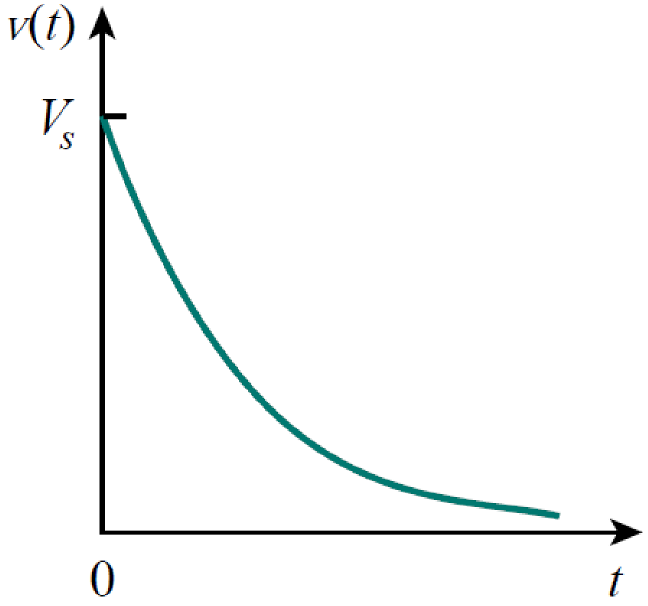
Resposta RL forçada (a degrau)

Para calcularmos a corrente no capacitor, basta derivarmos a tensão.
Sabemos que:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} \qquad \left(i_L(t) = \frac{v_s}{R} + \left(I_0 - \frac{v_s}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

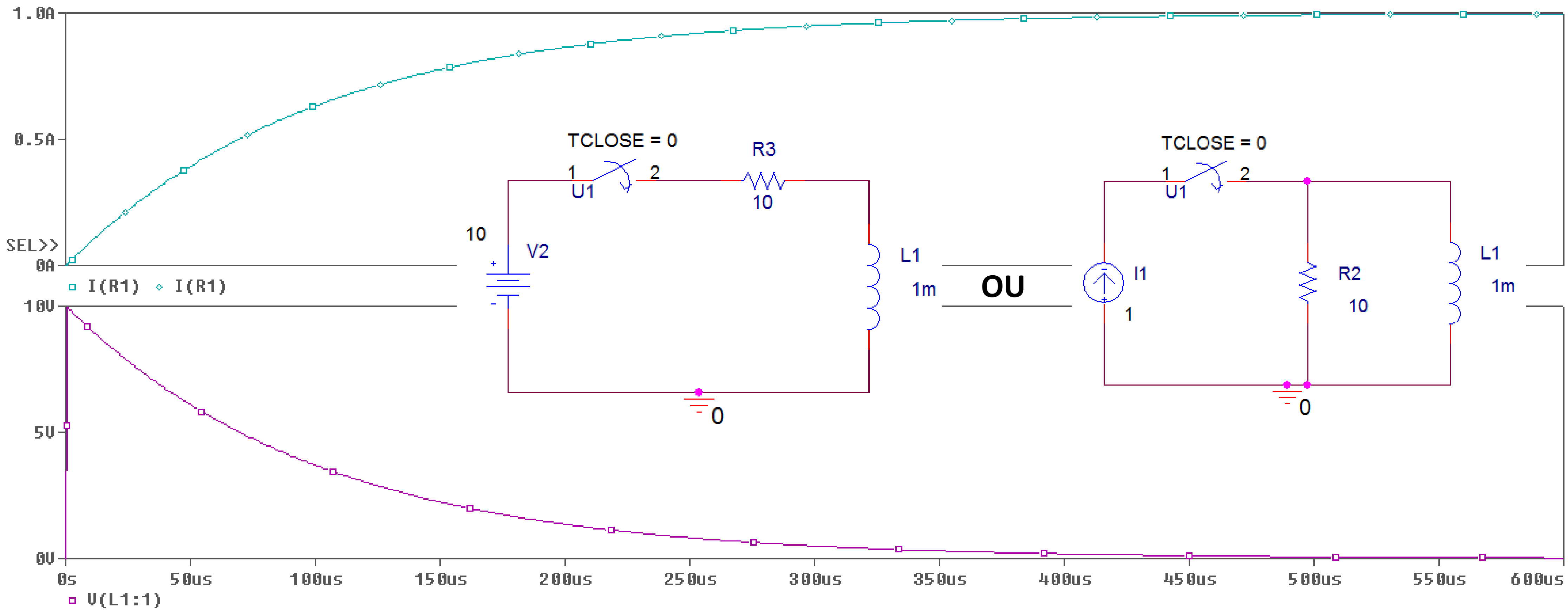
$$v_L(t) = (v_s - I_0 R)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_L(t) = v_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \rightarrow \quad se\ I_0 = 0$$



Resposta RL forçada (a degrau)

$$i_L(t) = \frac{v_s}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

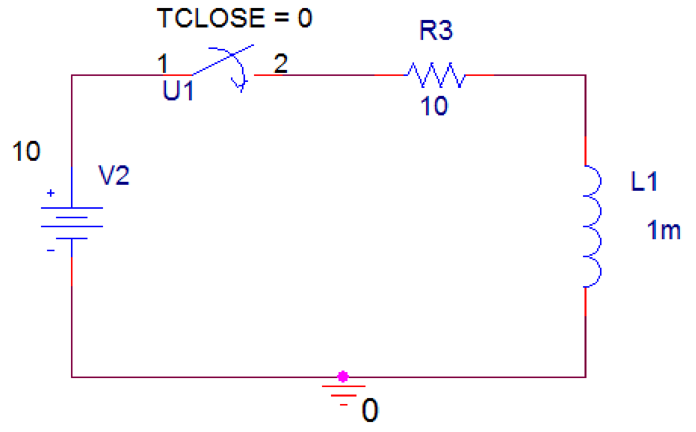


$$v_L(t) = v_s e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Resposta RL forçada (a degrau)

Como observado nos gráficos anteriores, a constante...

$$\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{L}} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\tau}} \qquad \boldsymbol{onde} \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{R}}$$



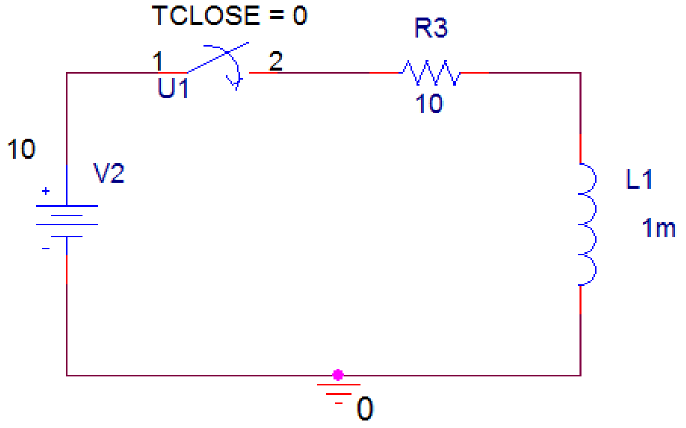
...faz referência ao tempo de "carga" (ou "descarga") do indutor (S.I. tempo=seg.). Da mesma forma que a constante $R \cdot C$ é constante de tempo nos circuitos RC, L\R é a **constante de tempo** nos circuitos RL. Quanto maior a constante de tempo, maior o tempo para carga ou descarga, seja nos circuitos RC, seja nos circuitos RL

Resposta RL forçada (a degrau)

Neste exemplo a constante de tempo (tau) é igual a:

$$\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R} = \frac{1m}{10} = 0,1ms}$$

** A unidade de tal é o segundo



Tempo	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	**Corrente**	Tensão	**%**
$t = 1\tau$	0,36788	**0,63212A**	3,6788V	**63,212%**
$t = 2\tau$	0,13534	**0,86466V**	1,3534V	**86,466%**
$t = 3\tau$	0,04979	**0,95021V**	0,4979V	**95,021%**
$t = 4\tau$	0,01832	**0,98168V**	0,1832V	**98,168%**
$t = 5\tau$	0,00674	**0,99326V**	0,0674V	**99,326%**

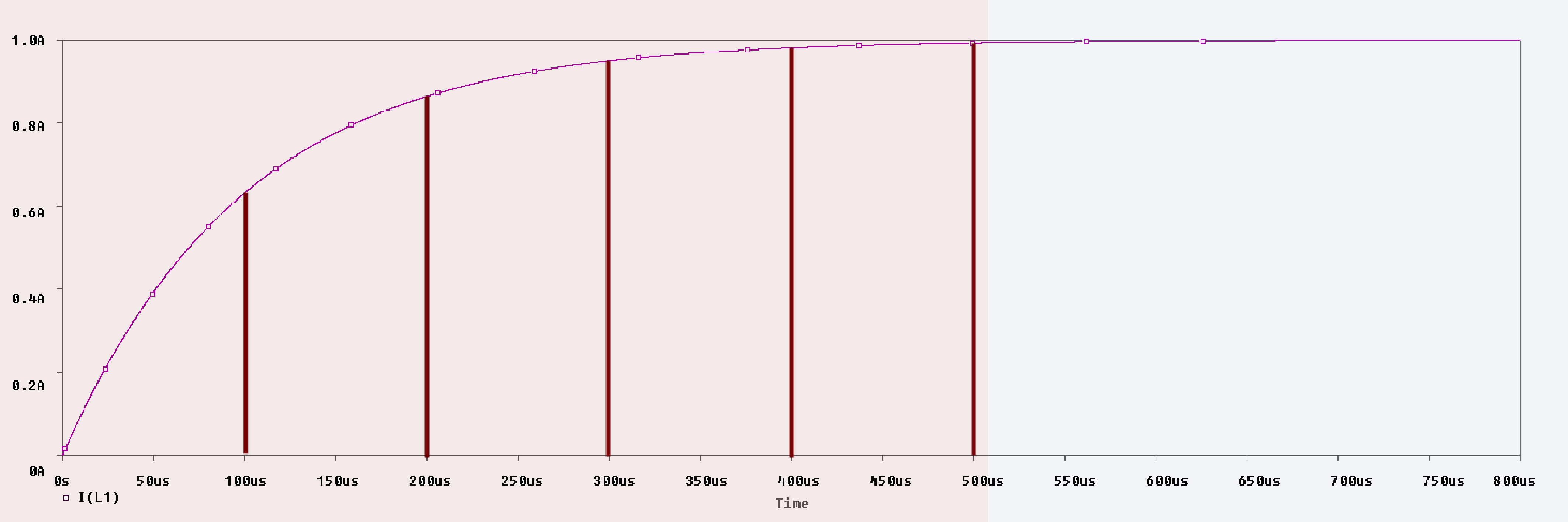
$$i_L(t) = \frac{10}{10} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_L(5\tau) = \frac{10}{10} \cdot (1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}})$$

$$v_L(t) = 10e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Resposta RL forçada (a degrau)

Resposta transiente: resposta temporária do circuito que se extinguirá com o tempo



$$i_{completa} = i_{estac} + i_{trans}$$

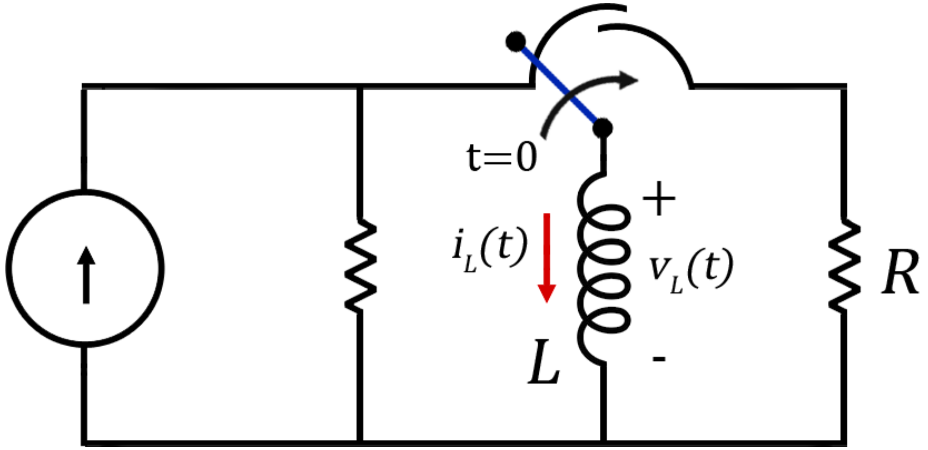
$$i(t) = i(\infty) + \big(i(0) - i(\infty)\big) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Resposta em regime estacionário: comportamento um longo tempo após excitação

Resposta RL natural

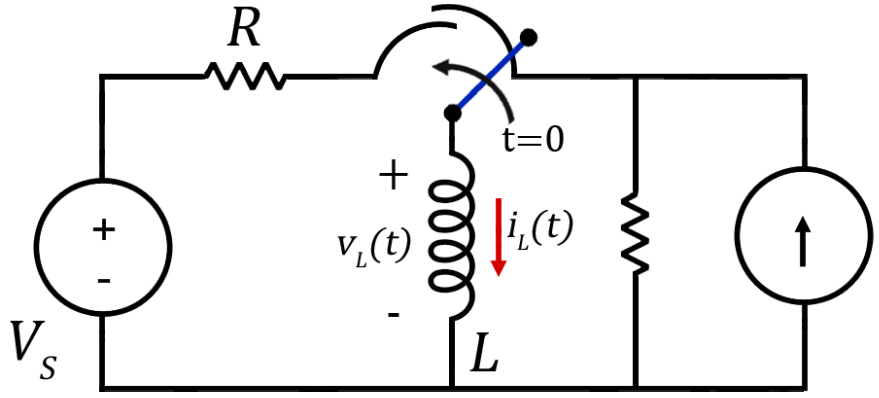
A resposta natural de um circuito RL avalia a descarga do indutor.

Uma vez que o indutor possua energia armazenada ($I_0 \neq 0$) em seu campo magnético, a transferência da energia dar-se-á pela queda exponencial da corrente. Uma vez que a corrente no indutor, não pode variar bruscamente a direção do fluxo de corrente permanece a mesma.



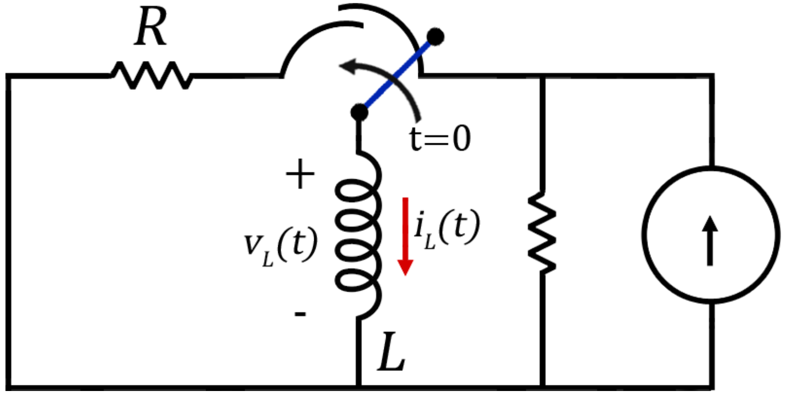
Para “economizarmos” a dedução da resposta natural do circuito RL, vamos utilizar o mesmo circuito da dedução da resposta forçada, porém considerando que: $\boldsymbol{I_s = 0} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{I_0 \neq 0}$

Resposta RL natural



Resposta forçada:

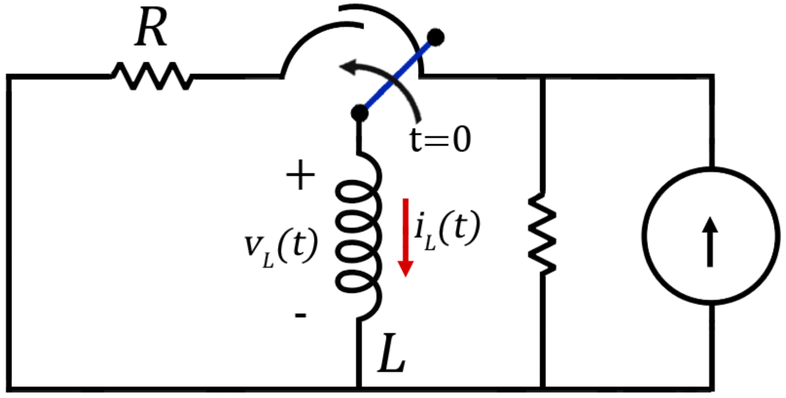
$$\boldsymbol{i_L(t) = \frac{v_S}{R} + \left(I_0 - \frac{v_S}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$$



Resposta natural: $(I_0 \neq 0 \;\; e \;\; V_S = 0)$

$$\boldsymbol{i_L(t) = \; I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$$

Resposta RL natural



$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{L}{R} \qquad v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_L(t) = -RI_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

Por que a tensão é negativa?

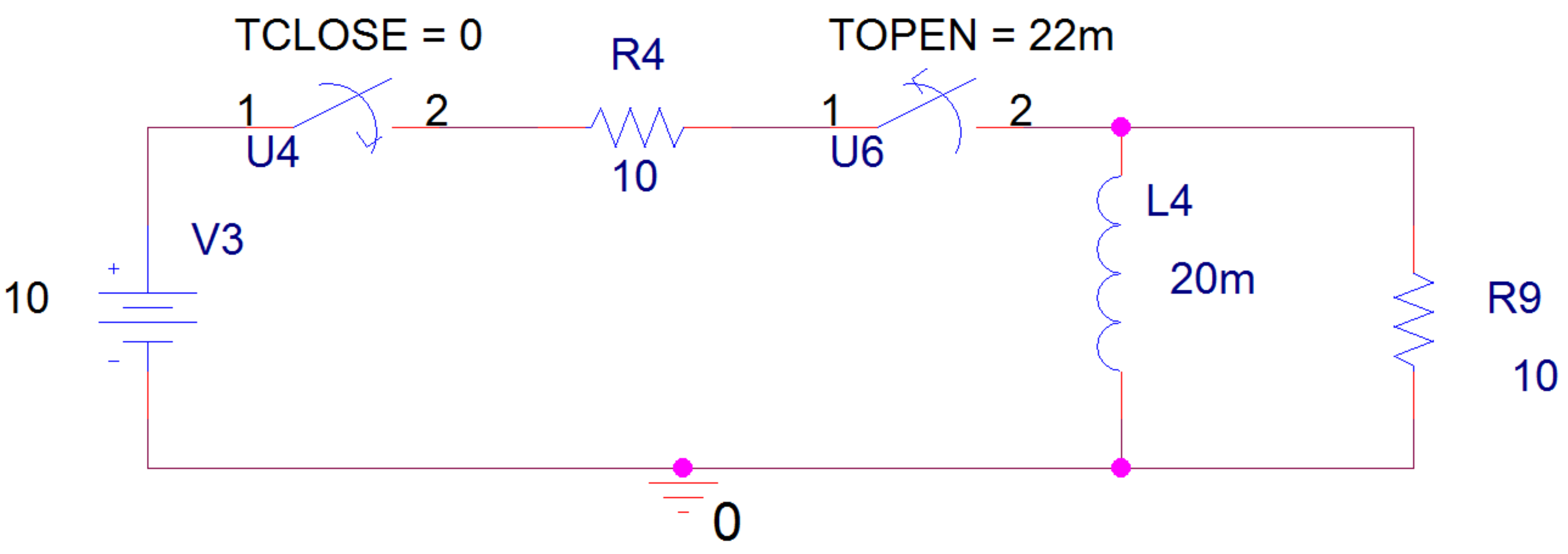
Deduzimos a relação de tensão utilizando os parâmetros do circuito anterior (resposta forçada), portanto a referência da tensão continua a mesma.

A transferência de energia do indutor para uma carga é efetuada por meio do decaimento exponencial da corrente. Para o campo magnético existir, é necessário um fluxo de cargas e a dinâmica deste fluxo não varia de forma brusca. Assim, para que o indutor se comporte como o componente que transfere energia (potência negativa – corrente na elevação de tensão), a referência da tensão é invertida instantaneamente.

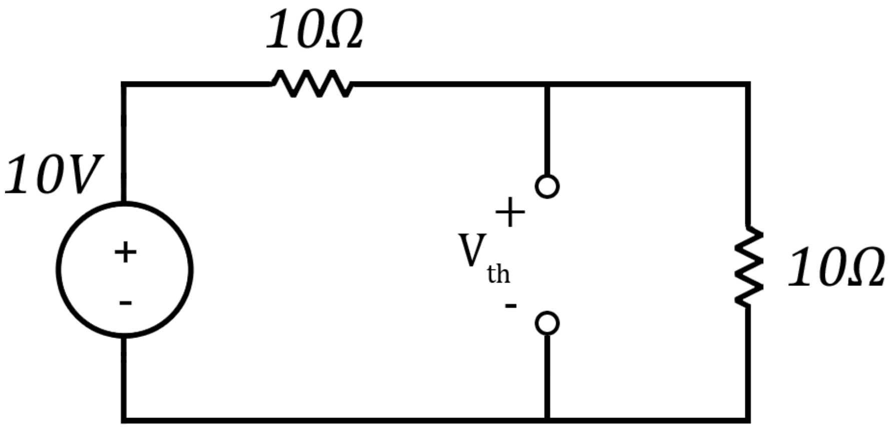
Resposta RL

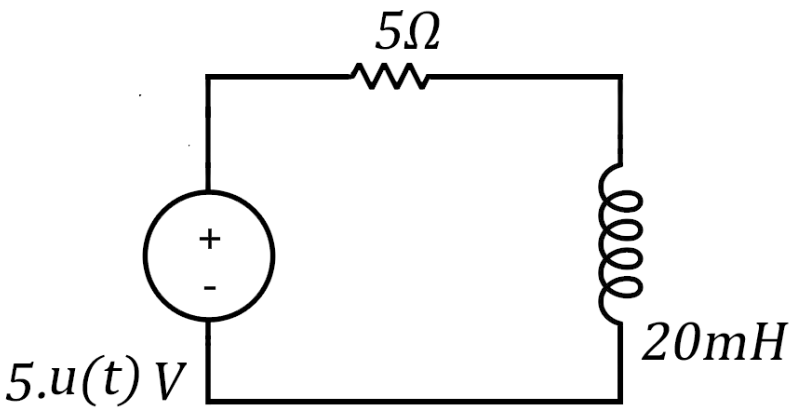
Exemplo: Qual o tempo para alcançar aproximadamente 99% da carga (5τ) do indutor, qual o tempo para transferir aproximadamente 99% da energia armazenada, encontre 0^- e 0^+ da tensão e da corrente do indutor. Encontre as equações, de tensão e corrente, que representa a resposta a degrau e a resposta natural do indutor. *A energia inicial do indutor é igual a zero.

(fecha em t=0) **(depois de 22ms abre)**



1) Resposta forçada





$$V_{th} = 10 \cdot \frac{10}{10+10} = 5V \qquad R_{th} = 10\,||\,10 = 5\Omega$$

$$\tau_1 = \frac{L}{R_{th}} = \frac{20m}{5} = 4ms \qquad \boldsymbol{5\tau_1 = 20ms}$$

$$i_L(t) = \frac{v_s}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad v_L(t) = v_s e^{-\frac{t}{\tau}}$$

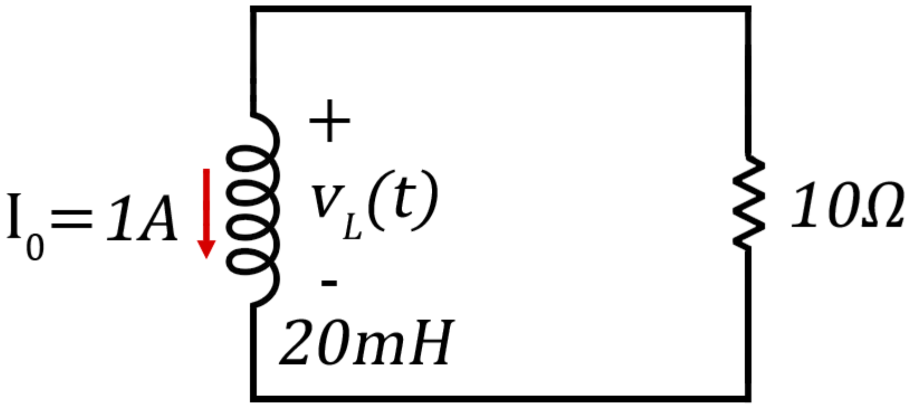
*** Note que Vs e R são agora as relações de Thevénin**

$$\boldsymbol{i_L(t) = 1 \cdot \left(1 - e^{-250t}\right) A} \qquad \boldsymbol{v_L(t) = 5e^{-250t} V}$$

$$\boldsymbol{i(0^-) = i(0^+) = 0A} \qquad \boldsymbol{v(0^-) = 0V}$$

$$\boldsymbol{i(22m) \cong 1A} \qquad \boldsymbol{v(0^+) = 5V}$$

2) Resposta Natural



$$\tau_2 = \frac{20m}{10} = 2ms \qquad 5\tau_2 = 10ms$$

$$i_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad v_L(t) = -RI_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\boldsymbol{i_L(t) = 1 \cdot e^{-500t}\mathrm{A}} \qquad \boldsymbol{v_L(t) = -10e^{-500t}V}$$

Essa seria a resposta se considerássemos que $t = 0$ para a resposta natural, porém como $t \neq 0$.

$$\boldsymbol{i_L(22m^-) = i(22m^+) = I_0 = 1A}$$

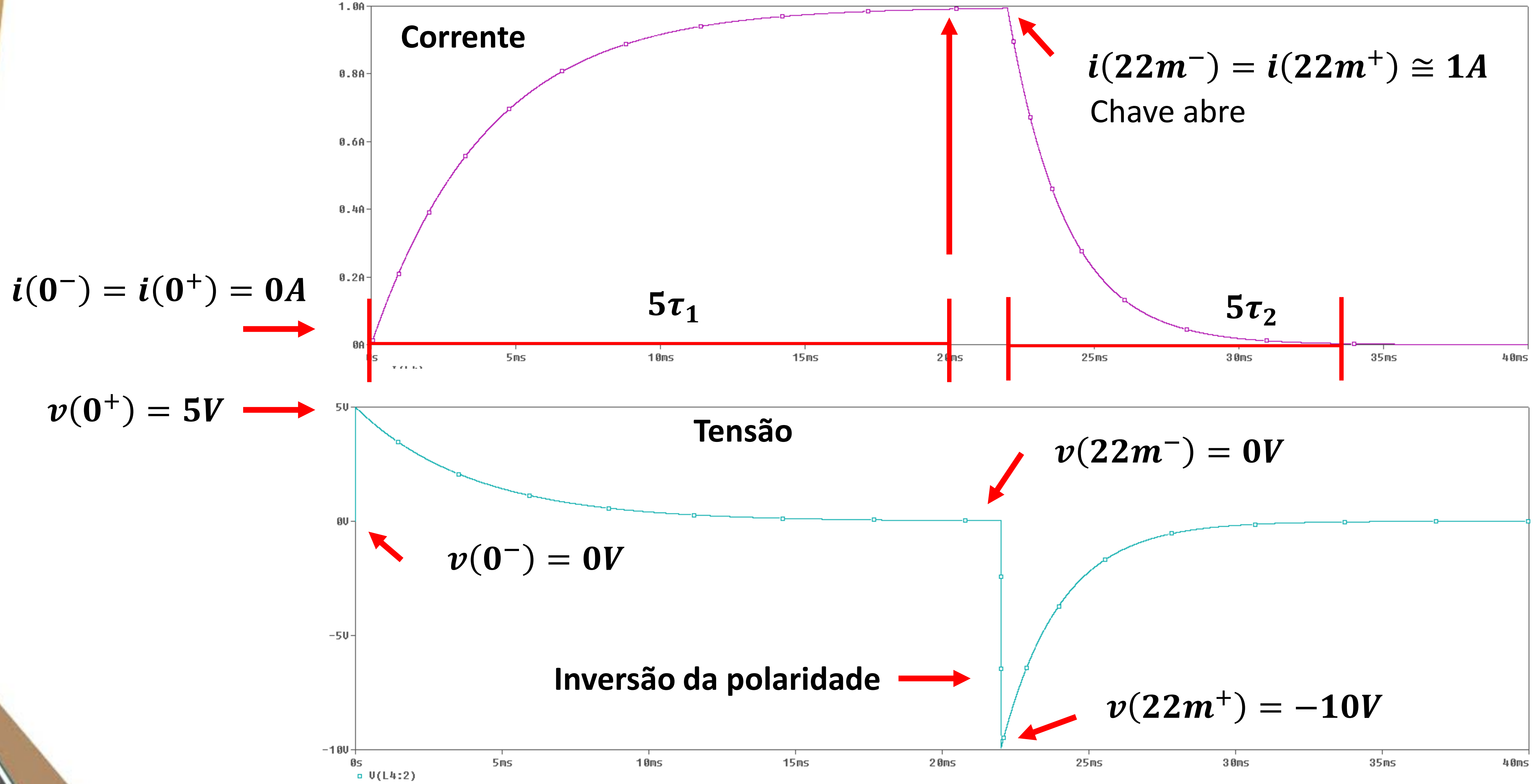
$$\boldsymbol{v_L(22m^-) = 0V}$$

$$\boldsymbol{v_L(22m^+) = -10V}$$

$$\boldsymbol{i_L(t) = 1 \cdot e^{-500(t-22m)}\mathrm{A}}$$

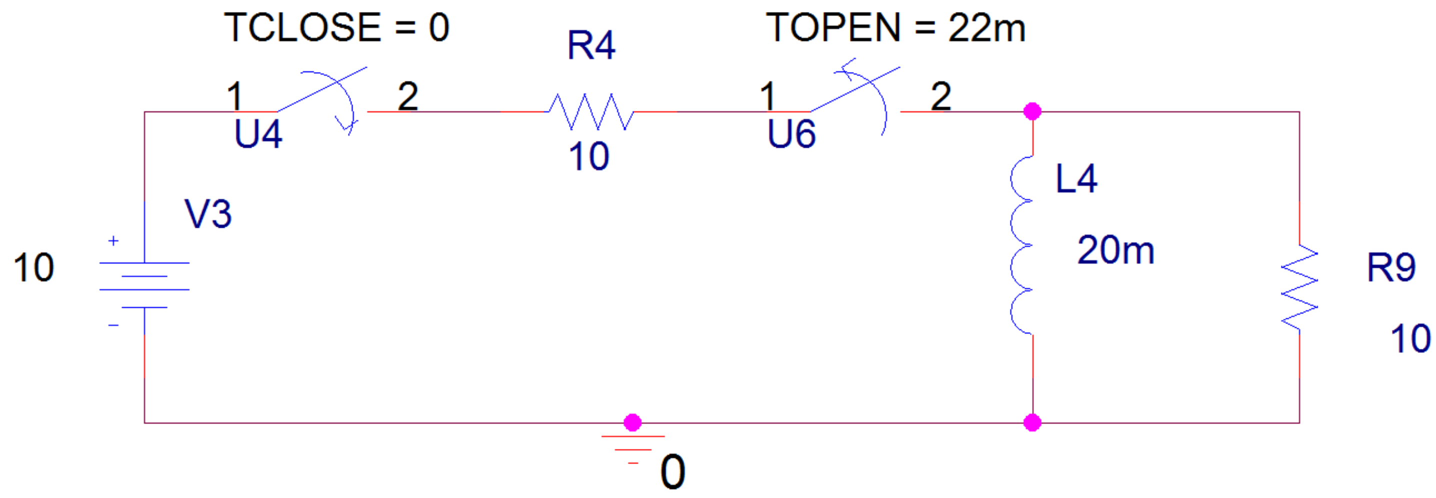
$$\boldsymbol{v_L(t) = -10e^{-500(t-22m)}V}$$

Resposta RL



Corrente
$i(22m^-) = i(22m^+) \cong 1A$
Chave abre
$i(0^-) = i(0^+) = 0A$
$5\tau_1$
$5\tau_2$
$v(0^+) = 5V$
Tensão
$v(22m^-) = 0V$
$v(0^-) = 0V$
Inversão da polaridade
$v(22m^+) = -10V$
V(L4:2)

3) Como expressar a resposta do circuito?

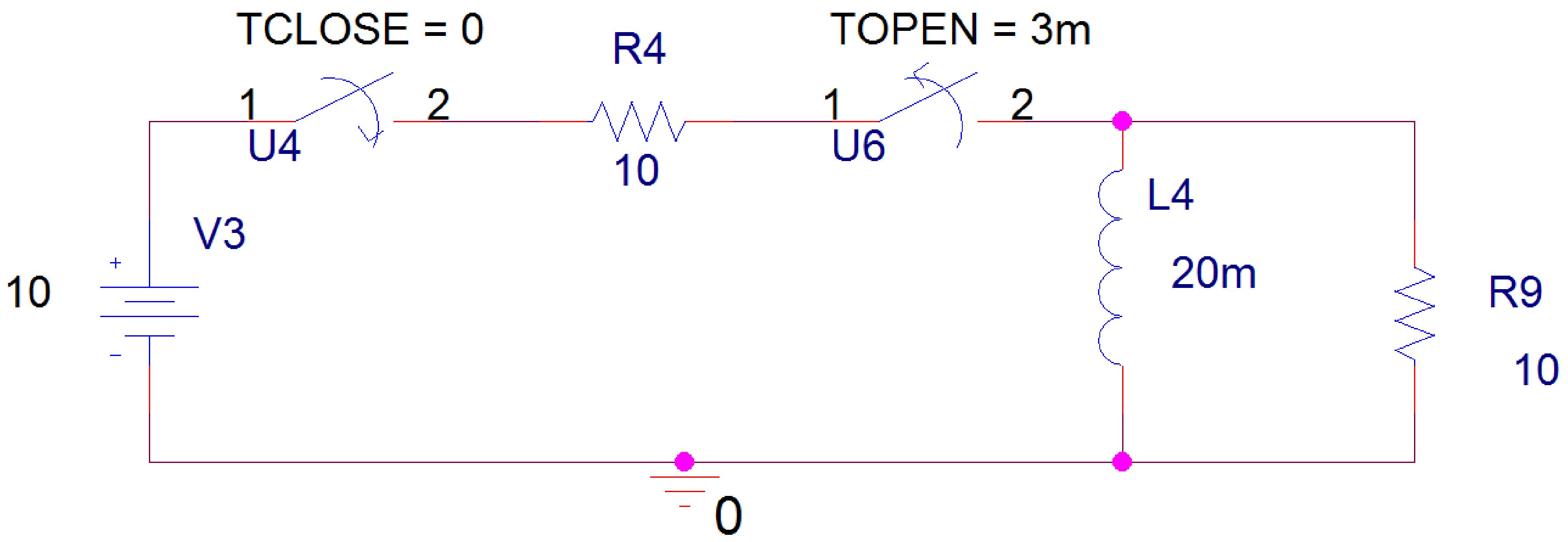


$$\begin{cases} t < 0 & \rightarrow \ i_L(t) = 0A \\ 0 \leq t < 22m & \rightarrow i_L\,(t) = 1 \cdot (1 - e^{-250t})A \\ t \geq 22m & \rightarrow \ i_L(t) = 1 \cdot e^{-500(t-22m)}A \end{cases}$$

$$\begin{cases} t < 0 & \rightarrow \ v_L(t) = 0\mathrm{V} \\ 0 \leq t < 22m & \rightarrow v_L\,(t) = 5e^{-250t}V \\ t \geq 22m & \rightarrow v_L(t) = -10e^{-500(t-22m)}V \end{cases}$$

Exercícios

Exercício: Caso a chave passasse apenas 3m segundos fechada. Como seria a equação da corrente para a resposta natural? Qual será o tempo para “descarregar” o indutor?



Exercícios

Exercício: Caso a chave passasse apenas 3m segundos fechada. Como seria a equação da corrente para a resposta natural?

Equação para resposta forçada

$$\boldsymbol{i_L(t) = 1 \cdot \left(1 - e^{-250t}\right) A}$$

$$\boldsymbol{i_L(10m) = 1 \cdot \left(1 - e^{-0,75}\right) = 0,53A}$$

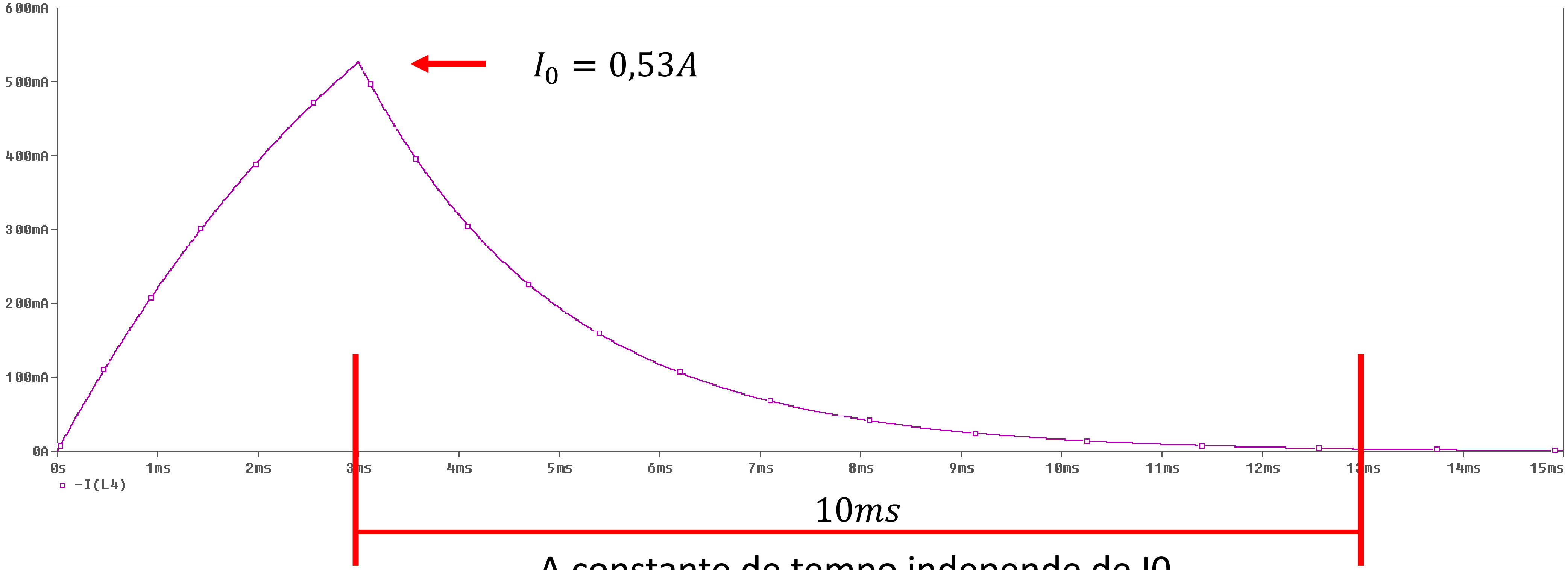
Neste caso I0 seria igual a 0,53A. O indutor não atingiria sua saturação

$$\boldsymbol{i_L(t) = \ I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\boldsymbol{i_L(t) = \ 0,53 \cdot e^{-500(t-3m)} \mathrm{A}}$$

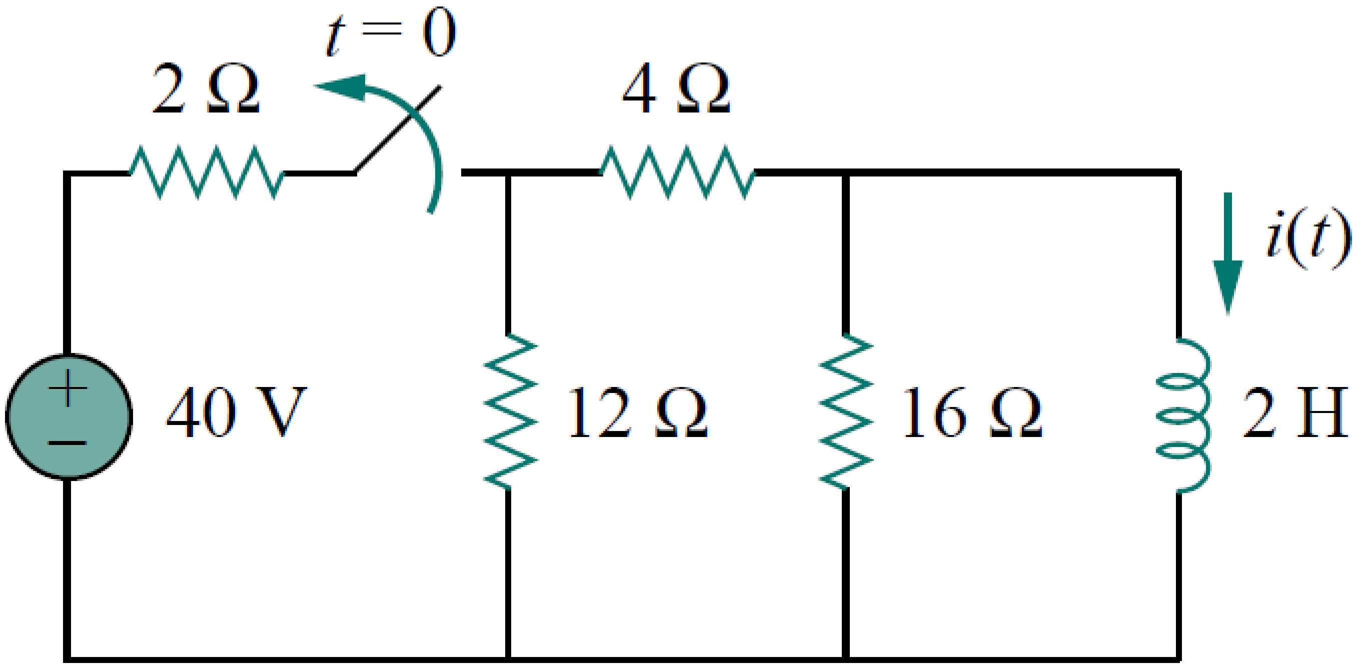
$$\begin{cases} t < 0 & \rightarrow \ i_L(t) = 0 \\ 0 \leq t < 3m & \rightarrow i_L(t) = 1 \cdot (1 - e^{-250t}) A \\ t \geq 3m & \rightarrow i_L(t) = 0,53 \cdot e^{-500(t-3m)} A \end{cases}$$

Exercício: Caso a chave passasse apenas 3m segundos fechada. Como seria a equação da corrente para a resposta natural?

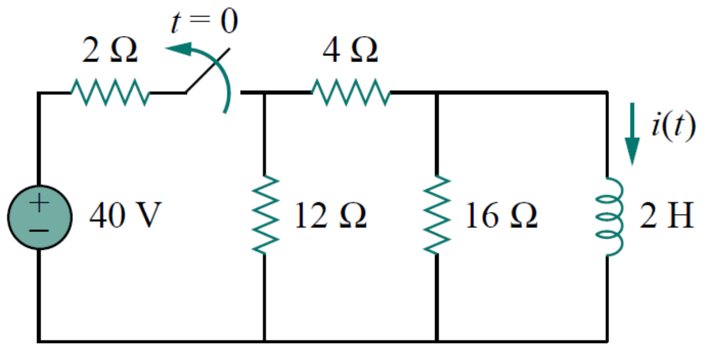


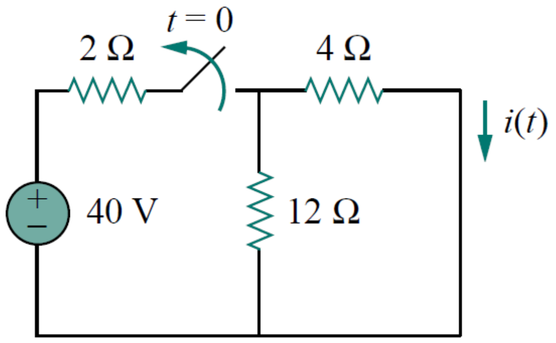
A constante de tempo independe de I0

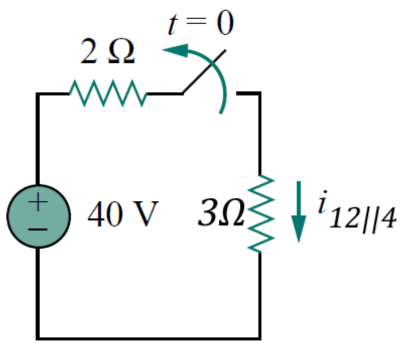
Exercício: A chave passou um longo período fechada. Encontre i(t).



Exercício: A chave passou um longo período fechada. Encontre i(t).







$$R_{4\,||12} = 4\,||\,12 = 3\Omega$$

$$i_{4\,||12} = \frac{40}{5} = 8A$$

$$I_{4\Omega} = I_0 = 8 \cdot \frac{12}{12+4} = 6A$$

Como o indutor se comporta como um curto circuito, não há corrente no resistor de 16Ω, assim se encontrarmos a corrente que passa pelo resistor de 4Ω teremos I0.

$$R_\tau = (4+12)\,||\,16 = 8\Omega$$

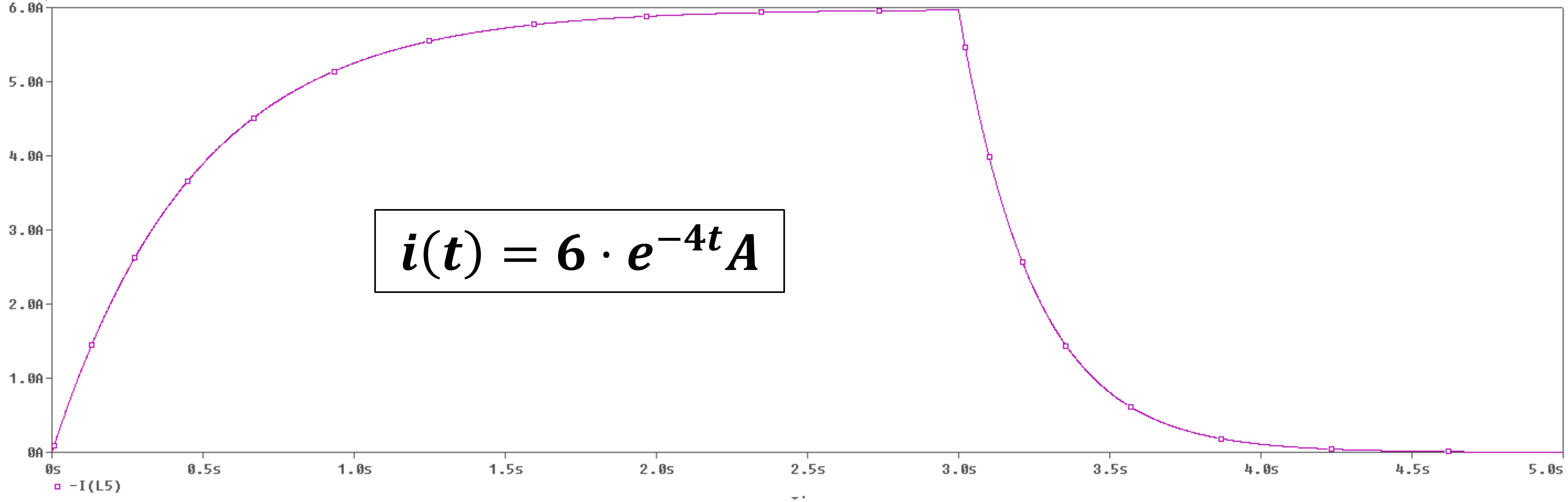
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{8} = 0{,}25s \qquad \frac{1}{\tau} = 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = 6 \cdot e^{-4t} A}}$$

Exercício: A chave passou um longo período fechada. Encontre i(t).

$I_0 = 6A$

$t = 0$



$$\boxed{i(t) = 6 \cdot e^{-4t} A}$$